Kısım I
İstatistik ve Olasılık

1 Olasılık Dağılımları

1.1 Discrete Uniform Dağılım

Tanım 1.1. Kesik Tekdüze Dağılım X rassal değişkeni eğer tüm değerlerinde aynı olasılığa aitse tekdüze dağılıma sahiptir.

$$f(x_i) = 1/n$$

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Tanım 1.2. Binom Dağılım Bernoulli denemesi, iki çıktısı olan deneylere verilen addır.
Eğer n Bernolli denemesi şu özelliklere sahipse:

- denemeler bağımsızdır
- her denemedeki başarı olasılığı p sabittir

Bu durumda X rassal değişkeni, başarı sayısını gösteriyorsa, binom rassal değişken olur. Olasılık yük fonksiyonu:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\mu = E(X) = np \quad \sigma^2 = V(X) = np(1-p)$$

Tanım 1.3. Geometrik Dağılım Bir Bernoulli denemeler dizisinde ilk başarılı sonucu elde edinceye kadar geçen sefer sayısına X dersek, bu geometrik bir dağılım gösterir.

$$f(x) = (1-p)^{x-1} p$$

$$\mu = E(X) = 1/p \quad \sigma^2 = V(X) = (1-p)/p^2$$

Tanım 1.4. Hiper Geometrik Dağılım N adet nesneden oluşan bir kümemiz var. Bunların K adedi başarılı, N-K adeti başarısız olarak sınıflandırılmış olsun. Kümeden n adet nesne çekiyoruz ve X adet başarı elde ediyoruz. Ancak bu sefer alınan nesneleri kümeye geri koymuyoruz. Bu dağılıma hiper geometrik bir dağılım denir.

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mu = E(X) = np \quad \sigma^2 = V(X) = np(1-p)\binom{N-n}{N-1}$$

Tanım 1.5. Poisson Dağılımı Reel sayıların bir aralığı verilmiş. Aralık içinde sayım yapılıyor. Eğer aralık, şu özelliklere sahip çok küçük alt aralıklara parçalanabilirse:

- bir alt aralıkta birden fazla sayım yapma ihtimali sıfır
- bir alt aralıktaki sayım ihtimali diğerleriyle aynı ihitmaldeyse ve aralığın uzunluğuyla orantılıysa
- bir aralıktaki sayım sayısı, diğerlerinden bağımsızsa

Bu durumda deneye, Poisson süreci denir.
X rassal değişkeni, aralık boyunca toplam olay sayısını belirtirse, bu poisson dağılımına sahiptir:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$\mu = E(X) = \lambda \quad \sigma^2 = V(X) = \lambda$$

1.2 Sürekli Rassal Dağılımlar

Tanım 1.6. Sürekli Dağılım

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \mu^2$$

Tanım 1.7. Tekdüze Dağılım

$$f(x) = 1/(b-a)$$

$$\mu = E(X) = \frac{(a+b)}{2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Tanım 1.8. Normal Dağılım

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu = E(X)$$

$$\sigma^2 = V(X)$$

Tanım 1.9. Standart Normal Dağılım

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$E(Z) = 0$$

$$V(X) = 1$$

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z)$$

Teorem 1.10. *Normal Dağılıma Yaklaşıklıklar - Binom:*

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{(1 - p)}}$$

- Poisson:

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Tanım 1.11. Exponensiyel Dağılım Poisson dağılımda birbiri ardısıra gelen olayların arasındaki mesafe X, exponensiyel dağılıma sahiptir:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \mu = 1/\lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = 1/\lambda^2$$

Exponensiyel dağılımın en önemli özelliği, belleksiz oluşudur (lack of memory).

Tanım 1.12. Erlang Dağılımı Poisson dağılımda birbiri ardısıra gelen olaylarda, r. olayın meydana gelişine kadarki mesafe X, erlang dağılımına sahiptir. Bu exponensiyel rassal değişkenin daha genel halidir:

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r - 1)!}$$

$$E(X) = \mu = r/\lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = r/\lambda^2$$

Erlang rassal değişken, negatif binom rassal değişkenin sürekli benzeri olarak düşünülebilir. Negatif binom rassal değişken, r geometrik rassal değişkenin toplamı olarak ifade edilir. Aynı şekilde erlang rassal değişkeni de, r exponensiyel rassal değişkenin toplamı olarak temsil edilir.

Tanım 1.13. Gamma Dağılımı Erlang dağılımı, gamma dağılımının özel bir durumudur.
Eğer Erlang rassal değişkenin r parametresi, tam sayı değilse, fakat r>0 ise, o zaman rassal değişken bir gamma dağılımına sahip olur. Ancak Erlang yoğunluk fonksiyonunda, r parametresi r faktöryel olarak görünüyordu. Dolayısıyla faktöryel fonksiyonun bir genelleştirmesini yapmalıyız:

Poisson dağılımda birbiri ardısıra gelen olaylarda, r. olayın meydana gelişine kadarki mesafe X, erlang dağılımına sahiptir. Bu exponensiyel rassal değişkenin daha genel halidir:

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Integration by parts yöntemiyle gösterilebilir ki:

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$$

Dolayısıyla tam sayılar için şu formül geçerli olur,

$$\Gamma(r) = (r-1)!$$

Yoğunluk fonksiyonu:

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}$$

Dikkat ederseniz sadece bölen değişti, Erlang dağılımına göre.

$$E(X) = \mu = r/\lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = r/\lambda^2$$

Gamma dağılım fiziksel olaylarda pek kullanılmıyor. Ancak erlang ve chi-square bu dağılımın özel halleridir.

Tanım 1.14. Weibull Dağılımı Weibull dağılımı pek çok fiziksel sistemin hatalar arası zamanını modellemek için kullanılır. Parametrelerle oynayarak, farklı sistemleri modelleme esnekliğine sahiptir: Zamanla bozulmanın artması (aşınma), azalma (bazı yarı iletkenler), zamanda sabit kalma (sistem dışı etkilerden kaynaklanan bozulmalar)

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}\right]$$

Tanım 1.15. Lognormal Dağılım Bazı sistemlerdeki değişkenler, exponensiyel bir fonksiyona sahiptir: $x = exp(w)$. Eğer bu durumda, üs (w) bir rassal değişkense bu durumda x de bir rassal değişken olur. Eğer w'nin dağılımı normal dağılımsa, bu durumda x'in dağılımı lognormal olur.
Bu isim, şuradan geliyor: X'in ln transformasyonunu alın: $\ln(X) = W$. Yani X'in doğal logaritması, normal dağılır.